Es decir, estos dos vectores son soluci—n del sistema A! ! $\boldsymbol{o}$ y cualquier otra soluci—n es combinaci—n lineal de ellos.

Se puede demostrar que cuando se resuelve un sistema homogŽneo a partir de la forma escalonada reducida, el sistema generado es siempre linealmente independiente.

En este ejemplo la matriz A tiene 4 columnas, rango 2 (columnas 1 y 3 de la matriz escalonada) y nulidad 2 (columnas 2 y 4 de la matriz escalonada).

Teorema. Dimensi—n del espacio de soluciones.

Si ! es una matriz ! !! !! de rango r, la dimensi—n del espacio de soluciones del sistema ! ! ! ! es n ! r, esto es:

! ! !"#$%!! ! ! !"#$%&%(A!

Demostraci—n

Puesto que ! tiene rango !, sabemos que es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida ! con r filas no nulas. Sin pŽrdida de generalidad, suponemos que la esquina ! !x!! superior izquierda de B es la matriz identidad $!_r$. Como las filas nulas de ! no contribuyen a la soluci—n, las descartamos para quedarnos con una matriz ! !, de tama–o ! !! !! !, donde B' ! !!! : ! !. La matriz C tiene ! ! r columnas correspondientes a las variables $x_{r!1}$!! ! ! !,! ,! ! . As' pues, el espacio de soluciones de A! ! ! viene representado por el sistema:

$$\begin{cases} ! ! ! !!! !! !_{11}x_{!+!} + c_{!"} ! ! ! ! ! ! ! c_{!!-r} !_n ! 0 \\ !! !_2 !! ! !!! ! + c_{!"} x_{!!!} ! c_{!!} !_{!+!} + \cdots ! !_{!!-r} x_! ! ! \\ ! \\ !!! !!! !! !!!! !x_! + !_{r1} x_{r+1} + c_{!2} x_{!+!} ! ! + !_{!"!!} !_! = 0 \end{cases}$$

Resolviendo en las primeras r variables, expresadas en tŽrminos de las ! ! ! œltimas, se obtienen $n-r$ vectores de la base del espacio de soluciones. En consecuencia, el espacio de soluciones tiene dimensi—n ! ! !.

Ejemplo

Dada la matriz:

$$A ! \begin{bmatrix} 1 & ! & -2 & 1 & ! \\ ! & !1 & !! & ! & ! \\ !! & !! & 1 & !! & ! \\ ! & ! & ! & ! & !!" \end{bmatrix}$$

Denotemos los vectores columna por $\boldsymbol{a}_!$, ! ! !! $_3$!! ! , ! !

$$! \; ! \begin{bmatrix} ! & ! & ! \, ! & ! & 0 \\ ! & ! \, ! & ! \, 3 & 1 & ! \\ ! \, ! & ! \, ! & ! & ! \, ! & ! \\ ! & ! & ! & ! & ! \, !" \end{bmatrix} ! ! \quad ! B = \begin{bmatrix} ! & 0 & ! \, 2 & ! & 0 \\ ! & 1 & ! & 0 & ! \, 4 \\ ! & ! & ! & ! & ! \, 1 \\ ! & ! & 0 & 0 & ! \end{bmatrix} !$$

1. ! tiene 3 filas no nulas, luego el rango de A es 3. Adem‡s A tiene ! ! ! columnas, de modo que la nulidad de ! es ! ! !"#$% (!) ! 5 – 3 ! !
2. Como las columnas 1, 2 y 4 de ! son linealmente independientes, las correspondientes columnas de ! :

$$\boldsymbol{a}_! \; ! \begin{bmatrix} 1 \\ ! \\ ! \, ! \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ! _! \; ! \begin{bmatrix} ! \\ ! \, ! \\ -! \\ ! \end{bmatrix} \qquad ! _! \; ! \begin{bmatrix} ! \\ 1 \\ ! \, ! \\ ! \end{bmatrix}$$

forman una base del espacio de columnas de ! .

3. La tercera columna de ! es combinaci—n lineal de las dos primeras: $! _! \; ! \; -! \, ! _1 \; ! \; ! \, ! _!$, por tanto la misma relaci—n es v‡lida para las columnas correspondientes de ! :

$$! _! \; ! \begin{bmatrix} ! \, ! \\ ! \, ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \; ! \, ! \begin{bmatrix} ! \\ ! \\ ! \, ! \\ ! \end{bmatrix} ! \; ! \begin{bmatrix} ! \\ ! \, ! \\ ! \, ! \\ ! \end{bmatrix}$$

3.6.4 Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

ÀEs tambiŽn subespacio vectorial el conjunto soluci—n del sistema no homogŽneo ! ! $\boldsymbol{b}$? No, ya que el vector cero nunca es soluci—n del sistema.

No obstante existe una relaci—n entre los conjuntos de soluciones de los sistemas ! ! ! $\boldsymbol{o}$ y ! ! ! ! . Si $!_!$ es una soluci—n particular del sistema no homogŽneo, toda soluci—n del sistema es de la forma:

$$! \; ! \; !_! \; ! \; !_h$$

donde $!_!$!es una soluci—n del sistema homogŽneo asociado.

Teorema.

Si $!_!$ es una soluci—n particular del sistema ! ! ! ! , toda soluci—n de este sistema es de la forma

$$! \; ! \; \boldsymbol{x}_{p+} ! _h$$

donde $!_!$!es una soluci—n del sistema homogŽneo asociado ! $\boldsymbol{x}$! $\boldsymbol{o}$

Demostraci—n

Sea ! una soluci—n cualquiera de ! ! ! ! . Entonces (! ! ! $_!$! es soluci—n de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ porque:

$$\begin{cases} x_1 ! \ ! x_3 ! \ x_! \ ! \ ! \\ ! x_! + x_! \ ! \ ! !_! \ ! \ ! \\ !_! \ ! \ !!_! \ ! \ !!_! \ ! \ -! \end{cases}$$

Soluci—n

La matriz ampliada del sistema!! ! ! ! se reduce como sigue:

$$\begin{bmatrix} ! & ! & !! & ! & ! \\ 3 & ! & !! & ! & ! \\ ! & ! & ! & !! & -! \end{bmatrix} ! \longrightarrow \begin{bmatrix} ! & ! & !! & ! & ! \\ ! & ! & ! & !! & !7 \\ 0 & ! & ! & ! & ! \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a esta matriz escalonada reducida es:

$$\begin{cases} !_! \ ! \ !!_3 ! \ !_! \ ! \ ! \\ !_! \ ! \ !_! \ ! \ !!_! = ! \ ! \end{cases}$$

Haciendo $!_! \ ! \ s! \ !_! \ ! \ !$ podemos representar el vector soluci—n de! ! ! $\boldsymbol{b}$ como:

$$! \ ! \begin{bmatrix} !_! \\ !_! \\ !_! \\ !_4 \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! \ !! - !! \ ! \\ ! \ !! \ 3! - ! \\ !! \\ ! \end{bmatrix} ! \ ! \begin{bmatrix} ! \\ !! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \ ! \begin{bmatrix} !! \\ ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! \\ !7 \\ ! \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$! \ ! \ s!_! \ ! \ t!_! \ ! \ !_!$$

Es f‡cil ver que $!_!$ es una soluci—n particular de! ! ! ! y $!_! \ ! \ !!_! \ ! \ !!_!$ representa un vector arbitrario del espacio de soluciones de ! ! ! ! .

> **Teorema. Compatibilidad de un sistema lineal**
>
> El sistema de ecuaciones lineales ! $\boldsymbol{x}$! ! es compatible s’, y s—lo s’,! !pertenece al espacio de columnas de ! .

Demostraci—n

Sean:

$$! \ ! \begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!!} \\ !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!!} \\ ! & ! & ! & ! \\ !_{!!} & !_{!2} & ! & !_{!"} \end{bmatrix} !!!!!! \ ! \begin{bmatrix} !_! \\ !_! \\ ! \\ x_! \end{bmatrix} !!! !!!! \ ! \ ! \begin{bmatrix} !_1 \\ b_! \\ \vdots \\ !_! \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes, el vector columna de inc—gnitas y el vector columna de los tŽrminos independientes, respectivamente del sistema ! ! ! ! . Entonces:

Por tanto, ! ! ! ! s', y s—lo s',! es combinaci—n lineal de las columnas de ! . Es decir, es sistema es compatible s', y s—lo s', ! pertenece al subespacio de ! ^{m} generado por las columnas de ! .

Ejemplo

ConsidŽrese el sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1 + x_! \; ! \; !_! \; ! \; ! \; ! \\ \quad !_! + x_! \; ! \; ! \\ !\,!_! \; ! \; !!_! \; ! \; !_! = ! \end{cases}$$

La matriz de coeficientes se reduce:

$$! \; ! \begin{bmatrix} ! & 1 & !\,! \\ ! & ! & ! \\ ! & ! & !\,! \end{bmatrix} !! \quad ! \begin{bmatrix} ! & ! & ! \\ ! & ! & !\,! \\ ! & ! & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa que el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Procedemos de igual forma con la matriz ampliada:

$$[! \;\; !\,!\,]\,! \begin{bmatrix} 1 & ! & !\,! & !\,! \\ ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & !\,! & ! \end{bmatrix} ! \quad ! \begin{bmatrix} ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & !\,! & !\,! \\ ! & ! & ! & ! \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz ampliada es 2, por tanto ! est‡ en el espacio de columnas de ! y el sistema es compatible.

3.6.5 Sistemas lineales con matriz de coeficientes cuadrada

Resumen de condiciones equivalentes para matrices cuadradas:

Si ! es una matriz cuadrada de orden ! , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. ! es invertible
2. ! ! ! ! tiene soluci—n œnica para cualquier matriz ! de tama–o ! !! !! .
3. ! ! ! ! tiene s—lo la soluci—n trivial
4. ! es equivalente por filas a la matriz identidad de orden ! , $!_!$.
5. |! | ! !
6. !"#$% (!) ! !
7. Los vectores fila de ! son linealmente independientes.
8. Los ! vectores columna de ! son linealmente independientes.

3.7 Cambios de base en ! $^{!}$

Sean ! ! $\{\boldsymbol{v}_!$!! $_!$!! !! $_!$! y ! !! $\{!\,_1 ! \boldsymbol{u}_2$,! !! $_!$! dos bases de un espacio vectorial ! . Si

$$! \; ! \begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!\,!} \\ !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! \\ !_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & !_{!!} \end{bmatrix}$$

Demostraci—n

Sea $! \; ! \; d_! !_! \; ! \; !_! !_! \; ! \; ! \; + !_! !_!$ un vector arbitrario de V. Su matriz de coordenadas en la base B es, por tanto:

$$! \; ! \begin{bmatrix} !_! \\ !_! \\ ! \\ !_! \end{bmatrix}$$

As' pues:

$$! \; [! \; !_! \; ! \begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!\,!} \\ !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & \vdots & ! & ! \\ c_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} !_! \\ d_! \\ ! \\ d_n \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} !_{!!} \; !_! \; ! \; !_{!"} \; !_! + ! \; ! \; !_{!\,n} d_! \\ c_{!"} \; d_1 + c_{22} d \; ! \; ! \; ! \; !_{2!} \; !_! \\ ! \\ !_{!\,!} !_! + !_{n!} \, d_! \; ! \; ! + !_{nn} !_n \end{bmatrix}$$

Por otra parte, podemos escribir:

$$! \; ! \; !_! !_! \; ! \; d_2 !_! \; ! \; \cdots + !_! \, \boldsymbol{v}_! \; ! \; d_! \, (c_{11} !_1 + c_{21} !_2 + \cdots + c_{!\,!} \, !_!) ! \; \cdots + d_! \, (!_{!\,n} !_1 \; ! \; c_{!\,n} !_2 \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \, \boldsymbol{u}_!) \; !$$

$$! \; (!_! !_{11} \; ! \; \cdots + !_n !_{1!})!_! \; ! \; ! \; ! \; (!_! !_{!\,!} \; ! \; ! \; ! \; !_n !_{!!} \;)!_!$$

lo cual implica que:

$$[\boldsymbol{v}]_{!\,'} \; ! \begin{bmatrix} c_{!!} \; d_! \; + !_{12} !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!\,!} !_! \\ !_{!"} !_! \; ! \; !_{22} !_! \; ! \; ! \; + !_{!\,!} \, d_! \\ ! \\ !_{!\,!} !_! \; ! \; !_{!\,!} !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \; !_! \end{bmatrix}$$

Por tanto $! \; ! \boldsymbol{v} !_! \; = [! \,]_{!\,!}$ y concluimos que ! es la matriz de cambio de ! a ! ′.

> **Teorema. Inversa de la matriz de cambio de base.**
>
> Si ! es la matriz de cambio de una base ! ′ a otra base ! de ! $^!$, ! es invertible, y la matriz del cambio de ! a ! ! viene dada por ! $^{!\,!}$.

Demostraci—n

Por lo demostrado anteriormente, sea ! la matriz de cambio de base de ! a ! !. Entonces:

$!! !_! \; ! \; P[\boldsymbol{v}]_{!\,!} \quad y \; [! \,]_{!\,!} \; ! \; ! \; [\boldsymbol{v}]_!$

Teorema. Sean ! ! $\{! _1, v_!, \ldots !! _! ! $ y ! ! $\{u_1 !! _! !! \;!! _! !$ dos bases de $\mathbb{R}^!$. La matriz de cambio de B a ! $'$ se puede hallar aplicando el mŽtodo de eliminaci—n de GaussJordan a la matriz !! $^!$! ! ! como sigue:

$$[B' \; ! \; ! \; ! \; ! \quad [!_n : ! \; ^{!\,!} !$$

Demostraci—n

Supongamos que:

$$\begin{cases} !_1 ! \; c_{!!} \; !_! \; ! \; !_{!"} \; !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!\,!} !_! \\ !_! \; ! \; !_{!"} \; !_! \; ! \; !_{!!} \, u_! \; ! \; ! \; + !_{n2} u_! \\ \vdots \\ !_n \; ! \; c_{!\,!} \; !_! + !_{!\,!} \; !_! \; ! \; ! \; ! \; !_{!!} \; !_! \end{cases}$$

de modo que:

$$c_{!\,!} \begin{bmatrix} !_{!!} \\ !_{!"} \\ \vdots \\ !_{!\,!} \end{bmatrix} ! \; !_{!\,!} \begin{bmatrix} !_{!"} \\ !_{!!} \\ ! \\ !_{!\,!} \end{bmatrix} ! \; ! \; ! \; !_{!"} \begin{bmatrix} !_{!\,!} \\ !_{n!} \\ \vdots \\ !_{!!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} !_{!!} \\ !_{!!} \\ ! \\ !_{!"} \end{bmatrix} !!"\#" \; !! \; ! \; ! \; !! \; !! \; !!$$

Esta ecuaci—n vectorial da lugar, componente a componente, al sistema lineal:

$$\begin{matrix} v_{!!} \; ! \; !_{!\,i} !_{!!} \; ! \; !_{!\,!} !_{!"} \; ! \; ! \; ! \; !_{!"} \; !_{!\,!} \\ !_{!!} \; ! \; c_{1!} \, !_{12} + c_{2!} \, !_{!!} \; + \cdots + !_{!"} \; !_{!\,!} \\ ! \\ !_{!"} \; ! \; !_{!\,!} !_{!\,!} \; ! \; !_{!\,!} !_{!\,!} \; ! \; \cdots ! \; !_{!"} \; !_{!!} \end{matrix} \quad !!!"\#" \; !! \; ! \; ! \; !! \; !! \; !!$$

Como los ! sistemas tienen la misma matriz de coeficientes los podemos reducir simult‡nelamente usando la matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!\,!} & ! & !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!\,!} \\ !_{12} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} & ! & !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! \\ !_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & !_{!!} & ! & !_{!\,!} & !_{!\,!} & ! & !_{!!} \end{bmatrix}$$

Aplicando el mŽtodo de eliminaci—n de GaussJordan a esta matriz, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} ! & ! & ! & ! & ! & !_{!!} & !_{!"} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! & ! & !_{!"} & !_{!!} & ! & !_{!\,!} \\ ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & ! & ! & ! & !_{!\,!} & !_{!\,2} & ! & c_{!!} \end{bmatrix}$$

Ahora bien, por lo demostrado anteriormente la parte derecha de esta matriz es ! ! $P^{!\,1}$, luego la matriz tiene la forma:

$$[I_n \; : P^{!\,!}]$$

Soluci—n

Con los vectores de las dos bases formamos las matrices ! y B!:

$$! \; ! \begin{bmatrix} ! & ! & ! \\ ! & ! & ! \\ ! & 0 & ! \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad !\,' = \begin{bmatrix} ! & 0 & 2 \\ ! & !\,1 & ! \\ 1 & ! & -! \end{bmatrix}$$

Ahora construimos !! ! ! ′! y usamos Gauss-Jordan para reescribirla como [! ⋮ ! $^{-!}$]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & ! & 1 & 0 & 0 \\ ! & -! & ! & ! & ! & ! & ! \\ ! & ! & !\,5 & ! & ! & ! & ! \end{bmatrix} ! \longrightarrow ! \begin{bmatrix} 1 & ! & 0 & ! & -! & 4 & ! \\ 0 & ! & 0 & ! & 3 & !\,7 & !\,3 \\ ! & 0 & ! & \vdots & 1 & !\,2 & -! \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz de cambio de ! a B! es:

$$!^{-!} = \begin{bmatrix} !\,1 & 4 & ! \\ 3 & !\,7 & !\,3 \\ ! & -! & !\,! \end{bmatrix}$$

Si ! es la base can—nica, como en el ejemplo anterior, el proceso de transformar!! ! ! $^{!}$! a [$!_{!}$! ! $^{!\,1}$] se convierte en:

$$[B' \,!\, I_{!}\,] \;! \quad [!_n \,!\, P^{!\,1}]$$

Pero este es el mismo proceso utilizado para calcular la inversa de la matriz B!. Es decir, si ! es la base can—nica de! $^{!}$, la matriz de transici—n de! a ! ! viene dada por:

$$!^{-!} = !B^{!})^{!\,1}$$

El proceso es aœn m‡s simple si$B$! es la base can—nica, ya que la matriz! ⋮ ! $^{!}$] est‡ ya en la forma

$$[I_{!} \;\vdots\, !\,] = [!_{!} \;!\,!^{-!}\,]$$

En este caso la matriz de transici—n es simplemente:

$$!^{-1} = !$$

Ejemplo

Hallar la matriz de cambio de B a B! para las siguientes bases de ! $^{!}$:

$$! \;\; ! \;\; \{(!\;!\,!!\,)!(!\;!-!\,)\}$$

$$!\,' = \{(-!\,!!\,),(2!-!\,)\}$$

Soluci—n

Empezamos formando la matriz:

$$! \; !^{1} \; ! \begin{bmatrix} -! & ! \\ ! \; ! & 3 \end{bmatrix}$$

Podr’amos calcular la matriz de cambio de B! a ! obteniendo:

$$[! \;\; ! \; ! \; '] \; ! \begin{bmatrix} ! \; 3 & 4 & \vdots & -! & ! \\ 2 & ! \; ! & ! & ! & ! \; ! \end{bmatrix}$$

que se reduce a:

$$[I_2 \; ! \; ! \;] \; ! \begin{bmatrix} ! & ! & \vdots & 3 & ! \; 2 \\ ! & ! & ! & ! & -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz de cambio de ! ! a ! es:

$$P \; ! \begin{bmatrix} ! & ! \; ! \\ ! & ! \; 1 \end{bmatrix}$$

Podemos comprobar que esta matriz es la inversa de la matriz de cambio hallada anteriormente sin m‡s que calcular el producto:

$$PP^{! \; !} = \begin{bmatrix} ! & -2 \\ 2 & ! \; ! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ! \; ! & ! \\ ! \; ! & ! \end{bmatrix} ! \begin{bmatrix} ! & ! \\ ! & ! \end{bmatrix} ! \; !_{!}$$

3.7.1 Coordenadas en espacios generales n-dimensionales

Una ventaja de las coordenadas es que nos permiten representar vectores de un espacio ! -dimensional arbitrario con la notaci—n de! ! como vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo

Hallar la matriz de coordenadas de ! (!) = ! ! ! ! ! $x^{!}$ + 4 en la base can—nica de! $_3$, ! ! !! !! !! ! !! ! !.

Soluci—n

En primer lugar expresamos ! !! ! como combinaci—n lineal de los vectores de la base:

$$! \, (!) \; ! \;\; ! \, (!) \; ! \;\; ! \, (!) \; ! \;\; (! \; !)(!^{!}) \; ! \;\; ! \, (!^{!})$$

Esto quiere decir que la matriz de coordenadas de ! (!) en la base ! es:

$$!! \, (!)]_{!} \; ! \begin{bmatrix} ! \\ 0 \\ ! \; ! \\ ! \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Hallar la matriz de coordenadas de:

$$[! \; !]$$

Como ! se puede escribir:

$$X = \begin{bmatrix} ! & 1 \\ & 4 \\ & ! \end{bmatrix} ! \quad (! \; !) \begin{bmatrix} 1 \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \; ! \begin{bmatrix} 0 \\ ! \\ ! \end{bmatrix} ! \; ! \begin{bmatrix} ! \\ ! \\ ! \end{bmatrix}$$

su matriz de coordenadas en la base ! es:

$$[! \; !_S \; ! \begin{bmatrix} ! & ! \\ & ! \\ & ! \end{bmatrix}$$